1. Результаты

1. **Орторекурсивное разложение единицы** (совместно с П. Р. Косенко)
Пусть $\mathcal{H} = L^2([0,1], dx)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых по мере Лебега функций на отрезке $[0,1]$. Определим последовательность многочленов $p_n(x)$ условиями $p_0(x) = 1$, $p_n(x) = c_n x^n + p_{n-1}(x)$ для некоторого $c_n \in \mathbb{R}$ и $\langle p_n, x^n \rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Можно показать, что последовательность c_n обладает рядом замечательных свойств (см. отчёт за 2018 год). В 2019 году была продолжена работа по этому проекту. В частности, было доказана бесконечная последовательность равенств, связывающих c_n с числом π^2 и гармоническими числами $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. В частности, оказывается, что

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n \frac{H_{2n} - H_{n+1}}{n-1} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{19}{8}.$$

Кроме того, при помощи формул, выражающих c_n в виде детерминанта матрицы с рациональными коэффициентрами, удалось явно вычислить 2-адическую норму c_n. Более точно, мы показали, что $c_n = 2^{b(n)-2n} \frac{p}{q}$ для некоторых нечётных p и q, где $b(n)$ есть число единиц в двоичной записи n. Из этого, в частности, следует, что $c_n \neq 0$ для всех n и

$$|c_n| \geq \frac{(2n+1)!!}{(2n)!}$$

По итогам работы был опубликован препринт. Статья принята к печати в International Journal of Number Theory.

2. **Большие интервалы между суммами двух квадратов** (совместно с С. В. Конягиным)
Пусть $\{s_n\}$ — последовательность всех целых чисел, представимых в виде суммы двух квадратов. Хорошо известно, что $s_{n+1} - s_n \ll s_n^{1/4}$. Кроме того, величина $s_{n+1} - s_n$ в среднем ведёт себя как $\sqrt{\ln n}$. Однако оказывается, что разности между соседними элементами $\{s_n\}$ могут принимать значения существенно большие, чем среднее значение. А именно, результат И. Ричардса 1982 года утверждает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много n таких, что $s_{n+1} - s_n \geq$

$\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\ln n$. Данная оценка остаётся наилучшей по порядку на данный момент, однако в 2018 году К. Элсхолц и Р. Дитман увеличили константу $\frac{1}{4}$ до $\frac{195}{449}$. В совместной работе с С. В. Конягиным нам удалось увеличить данное число вдвое. Тем самым, мы доказали, что для бесконечно многих n выполняется оценка

$$s_{n+1}-s_n \geq \left(\frac{390}{449}-\varepsilon\right)\ln n \approx 0.86859\ln n.$$

3. **Положительность длинных сумм характеров**

Пусть p — нечётное простое число. Хорошо известно, что функция $n \mapsto \left(\frac{n}{p}\right)$ (символ Лежандра по модулю p) проявляет свойства шагов случайного блуждания. С другой стороны, классические результаты о суммах характеров показывают, что сумма первых $p/2$ значений всегда неотрицательна:

$$\sum_{n\leq p/2}\left(\frac{n}{p}\right)\geq 0.$$

Пусть α — вещественное число. Определим $L(\alpha,p)=\sum\limits_{n\leq \alpha p}\left(\frac{n}{p}\right)$. Численные эксперименты показывают, что при $\alpha\leq\frac{1}{2}$ для большинства простых чисел в смысле нижней относительной плотности выполнено неравенство $L(\alpha,p)\geq 0$. При помощи разложения Фурье для $L(\alpha,p)$ и теорем о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях, нам удалось показать, что если

$$\alpha\in\left\{0,\frac{1}{12},\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{8},\frac{5}{12},\frac{1}{2}\right\} \text{ или } \left|\alpha-\frac{1}{3}\right|<2\cdot 10^{-6},$$

то неравенство $L(\alpha,p)\geq 0$ выполнено для большинства простых чисел p в том смысле, что нижняя относительная плотность таких p строго больше $\frac{1}{2}$.

4. **О графе симметричности простых чисел**

Пусть p и q — нечётные простые числа. Будем говорить, что пара $\{p,q\}$ является симметричной, если $(p-1,q-1)=|p-q|$. Простое число p будем называть симметричным, если оно входит в хотя бы одну симметричную пару. В недавней работе «Symmetric primes revisited» авторы получили новые верхние и нижние оценки для количества симметричных простых $p\leq x$ при больших x. В работе также поставлен ряд вопросов о графе симметричности простых чисел. Вершины приведенного графа симметричности простых чисел $\mathcal{G}^+$ — это симметричные простые числа p, два простых p и q соединены тогда и только тогда, когда $\{p,q\}$

— симметричная пара. Авторы ставят вопрос о связности графа $\mathcal{G}^+$, а также о количестве связных компонент. Нам удалось частично решить эти вопросы, а именно, оказалось, что граф $\mathcal{G}^+$ не является связным, наименьшее простое число, не лежащее в одной компоненте с 3, равно 3343, к тому же если верна асимптотическая форма гипотезы Диксона о простых значениях линейных форм, то граф $\mathcal{G}^+$ обладает некоторой "универсальностью"в том смысле, что для всякий конечный связный граф изоморфен бесконечно многим связным компонентам графа $\mathcal{G}^+$. Работа подана в журнал "Integers".

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. Large values of short character sums, Journal of Number Theory, 2019, Vol. 198, P. 200-210, doi:10.1016/j.jnt.2018.09.027

2. Intervals between consecutive numbers which are sums of two squares, Mathematika. 2019, Vol. 65, No. 4, P. 1018-1032, doi:10.1112/S0025579319000299

3. Orthorecursive expansion of unity (с П. Р. Косенко), arXiv:1901.04044

4. Large gaps between sums of two squares (с С. В. Конягиным), arXiv:1906.09100

5. Long nonnegative sums of Legendre symbols, arXiv:1911.10634

3. Участие в конференциях и школах

1. Семинар «Функциональный анализ и некоммутативная геометрия», Москва, 1 февраля 2019 года
Доклад «Множества ван дер Корпута и банаховы пределы»
2. Number Theory Seminar, TU Graz, Грац, Австрия, 6 марта 2019 года
Доклад «On the distribution of gaps between consecutive sums of two squares»
3. Мемориальная конференция памяти Ивана Матвеевича Виноградова, Москва, 28 марта 2019 года
Доклад «Орторекурсивное разложение единицы»
4. Семинар «Автоморфные формы и приложения», Москва, 9 апреля 2019 года
Доклад «Конструкция Коэна-Кузнецова и арифметические функции в коротких интервалах»
5. Семинар «Функциональный анализ и некоммутативная геометрия», Москва, 5 апреля 2019 года

Доклад «Groupoid C*-algebras associated with one-dimensional tilings»
6. International conference «Baikal Number Theory», остров Ольхон, Россия, 26-30 августа 2019 года
Доклад «Positivity of character sums»
7. XVII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», Тула, 23-28 сентября 2019 г.
Доклад «Nonnegativity of long character sums»
8. Семинар «Функциональный анализ и некоммутативная геометрия», Москва, 10 октября 2019 года
Доклад «Gowers norms»
9. Семинар «Автоморфные формы и приложения», Москва, 12 ноября 2019 года
Доклад «Упаковки сфер и автоморфные формы»
10. Семинар «Теория приближений», Москва, 28 ноября 2019 года
Доклад «Орторекурсивные разложения единицы»
11. Итоговая конференция МЛЗС: Молодые математики - 2020, Москва, 6 декабря 2019 года.
Доклад «Неотрицательность длинных сумм характеров»
12. Семинар «Современные проблемы теории чисел», Москва, 12 декабря 2019 года
Доклад «Положительность длинных сумм характеров»

4. Работа в научных центрах и международных группах.

Являюсь младшим научным сотрудником Международной Лаборатории Зеркальной Симметрии и Автоморфных Форм НИУ ВШЭ. В рамках гранта РНФ №18-41-05001 участвую в международном сотрудничестве российских и австрийских учёных, также участвую в гранте РНФ №19-11-0001.

5. Педагогическая деятельность

Организовал неофициальный студенческий семинар по теории чисел на математическом факультете НИУ ВШЭ, в рамках которого обсуждаются современные результаты аналитической теории чисел. Второй год читаю двухсеместровый

научно-исследовательский семинар для студентов математического факультета НИУ ВШЭ "Analytic number theory"на английском языке.
Работаю учебным ассистентом на курсе "Ergodic theory"для 3 курса бакалавриата и старше на математическом факультете НИУ ВШЭ.